**ХЕДЖИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ ПРОЦЕНТНЫХ АКТИВОВ И ПАССИВОВ БАНКА**

# **Формирование начального портфеля**

Объектом хеджирования является портфель кредитов и депозитов коммерческого банка. Пусть – число кредитов, – число депозитов. Суммы объемов кредитов и депозитов одинаковы и составляют . При моделировании можно использовать значения введенных параметров из табл.1.

Обозначим также объем кредита с номером , – объем депозита с номером . Должно соблюдаться условие

. (1)

Перед началом моделирования величины и , выбираются случайным образом. Объемы отдельных кредитов и депозитов выбираются на основе случайных чисел, равномерно распределенных на интервале . Пусть – выборка значений таких чисел. Тогда

, . (2)

Аналогично осуществляется выбор значений величин .

Таблица 1

Параметры портфеля кредитов и депозитов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер варианта | , штук | , штук | , руб. |
| 1 | 100 | 70 | 1000 000 000 |
| 2 | 400 | 500 | 3 000 000 000 |
| 3 | 100 | 70 | 3 000 000 000 |
| 4 | 100 | 500 | 1000 000 000 |
| 5 | 100 | 500 | 3 000 000 000 |
| 6 | 400 | 500 | 1 000 000 000 |
| 7 | 400 | 70 | 1 000 000 000 |
| 8 | 400 | 70 | 3 000 000 000 |

Кроме этого, пусть и – контрактные сроки кредита под номером и депозита под номером соответственно. Возможны три различных контрактных срока кредитов – 6 месяцев, 12 месяцев и 2 года. Депозиты могут быть размещены на 3 месяца, 6 месяцев и 1 год. Перед началом моделирования для всех кредитов и депозитов начального портфеля случайным образом определяются контрактные сроки. Возможные вероятности различных контрактных сроков кредитов и депозитов приведены в табл.2.

Помимо контрактного срока каждый кредит и депозит характеризуется оставшимся сроком до погашения. Обозначим через дату погашения кредита с номером . Аналогично – дата погашения депозита с номером . В начальный момент времени величины , и , получаются как

= и = , (3)

где – случайная величина, равномерно распределенная на интервале , – начальная дата моделирования; можно выбрать ее, например, как 31.12.2016 .

Таблица 2

Распределения вероятностей контрактных сроков кредитов и депозитов

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Депозиты | | | Кредиты | | |
| Номер варианта/сроки | 3 | 6 | 12 | 6 | 12 | 24 |
| 1 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 |
| 2 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 |
| 4 | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 0,2 | 0,4 | 0,4 |
| 5 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 0,8 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,8 |

Наконец, каждый кредит и депозит характеризуется процентной ставкой. В исследовании предполагается, что выплата процентов по всем договорам производится ежеквартально, а их начисление - ежедневно. В начальный момент времени всем кредитам и депозитам должны быть назначены соответствующие ставки. Для этого выбирается самая ранняя дата заключения кредитов (депозитов). Для этой даты случайным образом генерируются кривые процентных ставок (соответствующая модель должна быть построена по ставкам кредитов и депозитов нефинансовых организаций - следует использовать результаты стажировки в Банке ЗЕНИТ). Ставки по договорам, заключенным в дату , выбираются из соответствующих кривых процентных ставок согласно контрактному сроку кредита (депозита).

В дальнейшем моделируются кривые процентных ставок для дней и аналогичным образом назначаются процентные ставки всем кредитам и депозитам начального портфеля. (Здесь, как и ранее, – дата начала моделирования портфеля).

# **Моделирование управления портфелем и дерево сценариев факторов неопределенности**

При погашении кредита или депозита заключается новый кредит (депозит) такого же объема на такой же (контрактный) срок с процентной ставкой, действующей на рынке для кредитов (депозитов) в этот день. Помимо кредитов и депозитов банк имеет счет для учета прибылей и убытков по ним. В день остаток данного счета равен нулю. При погашении кредита (депозита) полученные (уплаченные) проценты добавляются к текущему остатку расчетного счета (вычитаются из него). Таким образом, остаток счета может быть отрицательным. На остаток текущего счета ежедневно начисляются проценты однодневной ставке G-кривой данного дня.

Хеджирование процентного риска портфеля кредитов и депозитов осуществляется при помощи процентных свопов. Для расчета свопов используется соответствующая G-кривая. Т.е., факторами неопределенности задачи являются процентные ставки по активам и пассивам, а также G-кривая безрисковых процентных ставок.

Моделирование указанных кривых процентных ставок осуществляется с шагом 1 день. В последний рабочий день каждого квартала осуществляется оптимизация хеджирующего портфеля свопов. После оптимизации моделируется перестройка свопов в соответствии с полученными рекомендациями. Задача оптимизации формулируется на основе парадигмы многоэтапного стохастического программирования.

Факторы неопределенности при решении задачи оптимизации портфеля свопов представляются при помощи дерева сценариев, которое содержит 6 этапов. Первый этап соответствует дню, когда производится оптимизация портфеля. Второй, третий, четвертый и пятый этапы соответствуют последним рабочим дням следующих кварталов. Последний шестой этап ассоциируется с днем 31 декабря, ближайшим к дате пятого этапа дерева. Каждый узел дерева имеет 10 преемников. Генерация соответствующих узлам кривых процентных ставок осуществляется по методу Монте-Карло. Всего дерево сценариев содержит сценариев. При решении оптимизационной задачи все сценарии считаются равновероятными.

Возможные сроки свопов составляют 6, 12 и 24 месяца. Днем погашения свопа всегда является последний рабочий день соответствующего квартала. Своп можно купить (в этом случае Банк становится получателем плавающей ставки) или продать (тогда он – плательщик плавающей ставки). Перед решением оптимизационной задачи следует рассчитать фиксированную ставку по всем возможным свопам. Выплаты по свопам производятся ежеквартально в соответствии с действовавшей на начала купонного периода годовой ставкой (взятой с G-кривой ).

Для расчетов по свопам используется еще один специальный счет. Процентные платежи по свопам добавляются к этому счету (вычитаются из него, если плательщиком оказывается банк). Ежедневно на остаток данного счета начисляется однодневная ставка G-кривой.

# **Современная теория портфеля**

## **Меры риска**

На протяжении многих лет в риск-менеджменте использовалась мера VaR (Value-at-Risk), представляющая собой верхний квантиль распределения вероятностей потерь портфеля, взятый с знаком минус (при измерении риска потери обычно выражаются положительным числом).

Приведем формальное определение VaR. Пусть – функция потерь портфеля, где – вектор, определяющий структуру портфеля; – случайный вектор, представляющий факторы неопределенности. Обозначим плотность распределения вектора . Тогда вероятность того, что значение не превысит заданный порог *α*, определяется как

. (4)

VaR для заданной доверительной вероятности , который будем обозначать , рассчитывается по формуле

. (5)

Однако VaR не является когерентной мерой риска (Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M. and Heath D., 1999). Кроме того, задача оптимизации портфеля с критерием VaR или с ограничением на величину VaR является невыпуклой. Отмеченные недостатки VaR явились стимулом к разработке новой меры риска, которая получила название CVaR (Conditional Value-at-Risk). В случае непрерывных случайных величин CVaR определяется как математическое ожидание потерь при условии, что величина потерь превысила уровень VaR (Rockafellar R.T. and Uryasev S., 2000):

. (6)

Определение (6) обеспечивает когерентность CVaR в случае непрерывных случайных величин. Однако применение (6) для дискретных случайных величин приводит к нарушению требований когерентности. Поэтому для дискретного случая CVaR определяется несколько по-другому (Rockafellar R.T. and Uryasev S. , 2002):

. (7)

Здесь – конечное множество значений случайного вектора , – вероятность осуществления сценария , – значение вектора при осуществлении сценария . Соотношение (7) задает когерентную меру риска. При увеличении числа сценариев мера (7) стремится к мере (6).

* 1. **Статическая оптимизация портфеля по критерию CVaR**

Если распределение вектора задано множеством сценариев, то оптимизация инвестиционного портфеля по критерию минимума CVaR может быть представлена как задача линейного программирования. Введем дополнительные переменные

, . (8)

Тогда

-.

Разделив обе части равенства на и перегруппировав слагаемые, получим:

. (9)

Сравнивая выражения (7) и (9), приходим к выводу, что левая часть равенства (9) есть соответствующее значение CVaR. Используя соотношение (9), R.T.Rockafellar и S.Uryasev в (Rockafellar R.T. and Uryasev S. , 2002) показали, что если – линейная функция по , то оптимизация портфеля по критерию минимума CVaR может быть осуществлена путем решения следующей задачи линейного программирования:

(10)

,  (11)

(12)

(13)

(14)

(15)

В последнем ограничении – функция затрат на формирование портфеля, которая также предполагается линейной. может учитывать рыночные котировки bid и offer, комиссионные издержки, возможность покупки и продажи (в том числе короткой продажи) финансовых инструментов. Символом обозначена начальная стоимость портфеля. Т.о., (15) представляет собой бюджетное ограничение.

Неравенство (14) задает ограничение на среднюю ожидаемую прибыль портфеля: математическое ожидание прибыли не должно быть меньше заданной величины . Ограничения (12) и (13) обеспечивают принятие переменными значений, заданных формулой (8), в результате оптимизации по критерию (10).

В (Rockafellar R.T. and Uryasev S. , 2002) доказывается, что в результате решения задачи (10) – (15) целевая функция принимает значение (т.е., значение CVaR, см. формулу (7)). Кроме этого, в результате оптимизации переменная принимает значение (формула (5)). Таким образом, одновременно с оптимизацией по критерию минимума CVaR получается соответствующее значение VaR.

* 1. **Динамическая оптимизация портфеля по критерию CVaR**

В результате решения задачи (10) – (15) получается оптимальный в рассмотренном смысле статический портфель финансовых инструментов, который формируется (или переформируется) в начальный момент времени и удерживается до конца горизонта планирования. Очевидно, что в общем случае лучших результатов можно достичь, если иметь возможность перестройки портфеля в течение данного интервала. Отметим, что совершенное хеджирование нелинейных производных финансовых инструментов (таких как опционы) традиционно реализуется как динамическая процедура.

Оптимизируя портфель в текущий (нулевой) момент времени, необходимо учитывать, какие действия по перестройке портфеля будут предприняты в будущем при реализации различных траекторий факторов неопределенности. В современном стохастическом программировании рассматривают конечное число моментов времени, которые называют *этапами* или *стадиями*. Только в эти моменты времени становятся известны значения факторов неопределенности и реализуются управленческие решения.

Обозначим множество рассматриваемых моментов времени. Элемент множества «1» соответствует текущему моменту, элемент «» - концу горизонта планирования. Факторы неопределенности представляются вектором , где подвекторы наблюдаются в моменты времени . Историю наблюдений факторов неопределенности будем обозначать , где .

Решение планируется для момента времени при условии, что последовательность векторов уже стала известна, но будущие значения факторов неопределенности еще не наблюдались. Таким образом, в момент времени «1», когда проводится оптимизация портфеля, вектор уже известен. В последующие моменты времени возможные реализации векторов , в предлагаемом исследовании задаются при помощи дерева сценариев. Задача многоэтапного стохастического программирования заключается в том, чтобы найти последовательность решений, которая удовлетворяет ограничениям оптимизационной задачи и доставляет минимум целевой функции. Заметим, что только решение непосредственно реализуется.

Помимо требований когерентности к мерам риска, используемым в задачах многоэтапного стохастического программирования, предъявляется требование *согласованности во времени* (time consistency). Содержательно данное требование означает, что управляющие воздействия, запланированные в начальный момент времени для некоторого узла дерева, будут снова получены при решении оптимизационной задачи, когда соответствующий сценарий реализуется и данный узел станет корневым узлом нового дерева (которое представляет собой поддерево исходного дерева).

На рис.1 представлен пример дерева сценариев для одного фактора риска. Рекомендации, полученные в начальный момент времени для, например, узла, обозначенного , должны вновь быть получены, когда реализуются значения факторов неопределенности, соответствующие данному узлу, и он становится корневым узлом дерева, содержащего два оставшиеся этапа. По сути, согласованность во времени представляет собой беллмановское свойство, на котором основывается детерминированное динамическое программирование. Однако, при включении в задачу неопределенности для его выполнения требуются дополнительные меры. Практические последствия нарушения свойства согласованности во времени анализируются, например, в (Birgit Rudloffa, Alexandre Street, Davi M. Valladão, 2014).

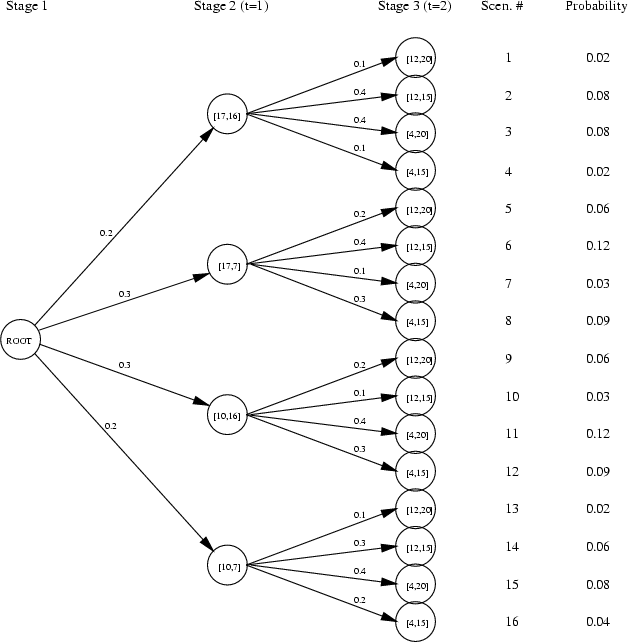


Рис.1. Пример дерева сценариев для одного фактора риска.

Задача (10) – (15) может быть обобщена на многоэтапный случай. Наивный подход к такому обобщению заключается в том, чтобы вместо потерь за один период рассматривать суммарные потери за все периоды горизонта планирования. Однако, такой подход приводит к нарушению требования согласованности во времени.

Многоэтапная задача оптимизации портфеля по критерию CVaR, удовлетворяющая требованию согласованности во времени, была предложена в диссертации M.Troha (Troha, 2011). Модель оптимизации портфеля свопов, разработанная в следующем разделе, основана на результатах данной диссертации.

# **Задача оптимизации хеджирующего портфеля свопов**

Множество узлов дерева сценариев, относящихся к этапу , будем обозначать , а количество элементов в этом множестве - . Пусть – некоторый узел дерева. Корневому узлу дерева назначается номер . Каждый из узлов , имеет ровно одного предшественника. Пусть

- предшественник узла на этапе . Индекс означает значение некоторой переменной перед оптимизацией портфеля;

– состояние счета накопленных % от кредитов и депозитов на конец дня, соответствующего этапу , в узле . Все эти величины известны до оптимизации;

– состояние счета накопленных платежей по свопам на конец дня, соответствующего этапу , в узле ; - значение данного параметра перед оптимизацией портфеля (с учетом выплат по свопам в этот день); ?

– множитель наращения от узла до узла . Рассчитывается по соответствующей динамике G-кривой;

– покупка (продажа) свопов в узле ; , где множество дат погашения свопов, которые могут быть заключены на этапе (содержит три элемента);

– фиксированные процентные ставки по свопам, которые могут быть заключены в узле ; , где множество дат погашения свопов, которые могут быть заключены на этапе (содержит три элемента);

Таблица 3

Сроки свопов в портфеле до оптимизации

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Срок до погашения, кварталов вперед | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Даты, когда мог быть заключен (кварталов назад) | 2 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 4 | 3 | 2 | 1 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

- позиции по свопам до оптимизации портфеля; , множество содержит возможные даты погашения свопов, всего восемь различных дат. Соответствующие сроки погашения свопов в кварталах представлены в табл. 3; - даты, когда своп был заключен. Как видно из табл.3, число элементов во множествах зависит от и может составлять от 1 до 3;

- фиксированные ставки по свопам, находящимся в портфеле до оптимизации портфеля; , множество содержит возможные даты погашения свопов, всего восемь различных дат. Соответствующие сроки погашения свопов в кварталах представлены в табл. 3; - даты, когда своп был заключен. Как видно из табл.3, число элементов во множествах зависит от и может составлять от 1 до 3;

– календарная дата, соответствующая этапу .

Можно записать следующее соотношение для остатка счета, на котором накапливаются выплаты по свопам:

, (16)

.

Здесь – значение G-кривой для срока инвестирования 1 год в узле-предшественнике узла . Множитель обусловлен тем, что платежи по свопам производятся раз в квартал.

Далее, обозначим

, – стоимость свопов, находящихся в портфеле на конец дня ;

– стоимость свопа номиналом 1 рубль, который мог быть заключен в узле на конец дня ; , где множество дат погашения свопов, которые могут быть заключены на этапе (содержит три элемента);

- стоимость свопа номиналом 1 рубль, который мог находиться в портфеле до оптимизации, на конец дня ; , множество содержит возможные даты погашения свопов, всего восемь различных дат. Соответствующие сроки погашения свопов в кварталах представлены в табл. 3; - даты, когда своп был заключен. Как видно из табл.3, число элементов во множествах зависит от и может составлять от 1 до 3.

Имеет место следующее соотношение:

, . (17)

Критерий оптимизации и последующие ограничения основаны на работе (Troha, 2011). Пусть – требуемая прибыль портфеля на конец дня .

(18)

s.t. , , , ,

(19)

, (20)

Обозначим еще через . Тогда

, , (21)

# **Программные средства и план исследований**

# **Список литературы**

Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M. and Heath D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance, 9*(3), 203-228. Получено из http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.196.1056&rep=rep1&type=pdf

Birgit Rudloffa, Alexandre Street, Davi M. Valladão. (1 May 2014 г.). Time consistency and risk averse dynamic decision models: Definition, interpretation and practical consequences. *European Journal of Operational Research, 234*(3), стр. 743-750. Получено из http://www.optimization-online.org/DB\_FILE/2010/12/2860.pdf

Rockafellar R.T. and Uryasev S. . (2002). Conditional Value-at-Risk for general distributions. *Journal of Banking and Finance, 26*(7), 1443–1471. Получено из http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/cvar2\_jbf.pdf

Rockafellar R.T. and Uryasev S. (2000). The Journal of Risk. *Journal of Banking and Finance, 2*(3), 21-41. Получено из http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/CVaR1\_JOR.pdf

Troha, M. (2011). *Portfolio Optimization as Stochastic Programming with Polynomial Decision Rules.* London: Imperial College London, Department of Computing. Получено из http://www.doc.ic.ac.uk/teaching/distinguished-projects/2011/m.troha.pdf